电驱动偏心转子与复合振动环境振动同步的理论研究

黄旭,苏明,孙易森,赵容晨,李荣,谢志平

(贵州师范大学机械与电气工程学院,550025 贵阳)

摘　要:在振动环境中,当带偏心转子的电机旋转角速度与振动环境的角频率相近时,两者可以实现振动同步。针对这一特殊现象,本研究提出一种小参数积分均值法来研究该振动同步问题,设置电驱动偏心转子角速度与振动环境角频率之差的积分均值为变量,通过积分变换将电驱动偏心转子与复合振动环境之间的动力学方程转化为二阶周期系数微分方程,应用周期系数二阶微分方程相关理论推导得出实现振动同步的同步性判据和稳定性判据,并通过数值仿真验证了同步性与稳定性判据的有效性。本研究提出的将电驱动偏心转子角速度与振动环境角频率之差的小参数积分均值法,为研究振动同步理论提供了一种新的方法。

关键词:复合振动环境;电驱动偏心转子;振动同步;同步性判据;稳定性判据

中图分类号:TH113　　**文献标志码:**A

Theoretical study on the synchronization of electric drive eccentric rotor and the compound vibratory environment

HUANG Xu,SU Ming,SUN Yisen,ZHAO Rongchen,LI Rong,XIE Zhiping

(School of Mechanical & Electrical Engineering,Guizhou Normal University,550025 Guiyang,China)

Abstract: There exists a special phenomenon that when the rotational angular velocity of a motor with eccentric rotors is close to the angular velocity of the compound vibratory environment,they can probably achieve vibratory synchronization. This paper proposes a novel solution to address the synchronization of the special phenomenon. An integral mean method with a small parameter is developed to define a variable of difference in angular frequency between the electrically-driven eccentric rotor and the compound vibratory environment,which formulates a dynamics equation between them. The dynamics equation is transformed into a second-order differential equation with periodic coefficient by applying integral. Then,the criteria of synchronization and stability for the vibratory synchronization are derived by using the second-order differential equation with the periodic coefficient. Numerical simulation results show that the derived criteria are effective. The proposed integral mean method with a small parameter provides a new approach for studying

收稿日期:2021-06-04　　**修回日期:**2022-01-21

基金项目:贵州省工业4.0仿真设计创新中心建设项目(黔科中引地[2016]4006号)

通信作者:苏明,教授。E-mail:suming629@163.com

引用格式:黄旭,苏明,孙易森,等.电驱动偏心转子与复合振动环境振动同步的理论研究[J].应用力学学报,2022,39(4):775-783.

HUANG Xu,SU Ming,SUN Yisen,et al. Theoretical study on the synchronization of electric drive eccentric rotor and the compound vibratory environment[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2022,39(4):775-783.

the theory of vibratory synchronization.

Key words: compound vibratory environment; electrically-driven eccentric rotor; vibratory synchronization; synchronization criterion; stability criterion

关于机械系统的振动同步现象或自同步现象[1],在17世纪Huygens就发现并研究了钟摆耦合现象。1894~1922年期间,Vanderpol[2]在非线性电路中发现同步现象,Rayleigh[3]在研究声学问题时发现两个靠近的风琴管会产生同步的声音,Vincent、Moller、Appletont等许多研究者也在非线性电路中发现特殊的同步性现象,他们把这种特殊的同步性现象称为"频率俘获"[1]。频率俘获是在非线性振动系统中,当系统接近共振工作时其固有频率常常被强迫振动频率俘获,从而系统中只能表现出频率为强迫振动频率的振动。

在机械系统的同步理论方面,上世纪50-60年代,苏联学者Blekhman最先提出双激振器振动机的振动同步理论[4-5],提出了直接运动分离法,将系统运动的初始微分方程转变为关于快运动分量和慢运动分量的积分微分方程,再用近似的方法求解快运动分量和慢运动分量[6-8]。基于此方法的研究往往侧重于数学理论的研究,而对系统耦合动力学特性及具体使用工况等的研究较少,其结果也会限制和影响理论结果的工程应用范围。上世纪70~80年代,闻邦椿等[9,11-13]在假设两台电机平均同步角速度恒定的条件下,在直接运动分离法的基础上考虑系统阻尼的影响,提出了平均转矩差法,将系统运动的微分方程转变为两个偏心转子间相位差的微分方程,简化了直接运动分离法中数学的处理过程,并于1983年发表关于振动同步传动理论的研究成果。随后,闻邦椿等[1,14-15]进一步完善了振动同步理论体系,创建了振动利用工程新学科。近20年来,一些学者也做了大量的理论探究和实验研究[16-17]。赵春雨等[18-21]提出的小参数法,引入激振器平均角速度和相位差的两个小参数,将转子同步问题转化为两转子平均转速与相位差的扰动微分方程的零解存在与稳定性问题;李鹤等[22]研究了含二次隔振架的双机驱动振动机的自同步理论;顾大卫等[23-24]研究了非对称双激振器振动同步传动,并在振动筛上实现振动同步传动及试验研究。在振动机械同步领域,国内研究目前处于领先地位。

上述研究均是以双电机或多电机驱动的振动系统为研究对象的,主要关心的是电机之间的同步行为,而本文研究的是电驱动偏心转子在振动环境中的动力学行为,主要关心的是电机与振动环境的同步行为。本文研究旨在为振动环境中电驱动偏心转子的同步利用或者规避提供理论基础,并通过仿真验证推导理论的正确性,为机械振动同步研究提供一种新的思路和方法。

1 振动系统的动力学建模与动力学方程

在大型破碎工作站等振动环境中的激振器,当激振电机的角速度与振动环境的角频率接近时,会出现激振电机与振动环境同步的现象。当激振电机的激振力较小,对振动环境影响可以忽略时,可以等效为电驱动偏心转子与振动环境的振动同步[25]。我国是砂石大国,若利用该复合振动场可以设计小型椭圆振动筛对砂石进行筛分,既可以达到资源利用和节约能源的目的,同时还兼备物料运输、筛分效率高的优势。本研究将这种振动同步现象抽象为以下模型进行研究,旨在为这种振动同步现象进行解释,并提供相应的理论基础。

图1为复合振动环境中电驱动偏心转子的动力学模型,电驱动偏心转子的动力学系统可以简述为:在存在 x 和 y 方向振动的恒定复合振动环境中(复合振动环境是由大型破碎工作站中的破碎机旋转产生的,假设其方向为正),电机直接驱动的偏心转子的转动惯量为 J、偏心质量为 m、偏心半径为 r,转子绕电机轴中心 O 旋转,O 满足振幅为 A_x、A_y 的简谐振动规律。当电机的旋转角速度与振动角频率接近的时候,电机的旋转角速度会被振动角频率俘获,即电驱动偏心转子与复合振动环境振动同步。

设 O 点 x 方向的运动方程为

$$\begin{cases} x = A_x\cos\varphi \\ x' = -\omega A_x\sin\varphi \\ x'' = -\omega^2 A_x\cos\varphi \end{cases}$$

设 O 点 y 方向的运动方程为

$$\begin{cases} y = A_y\sin\varphi \\ y' = \omega A_y\cos\varphi \\ y'' = -\omega^2 A_y\sin\varphi \end{cases}$$

式中：x、x'、x''分别为 x 方向上振动的位移、速度、加速度；y、y'、y''分别为 y 方向上振动的位移、速度、加速度；φ 为复合振动环境的角位移；ω 为复合振动环境的振动角频率；A_x为 x 方向上振动的振幅；A_y为 y 方向上振动的振幅；复合振动环境存在振动场强度为 $V_x=-\omega^2A_x\cos\omega t$、$V_y=-\omega^2A_y\sin\omega t$ 的振动。

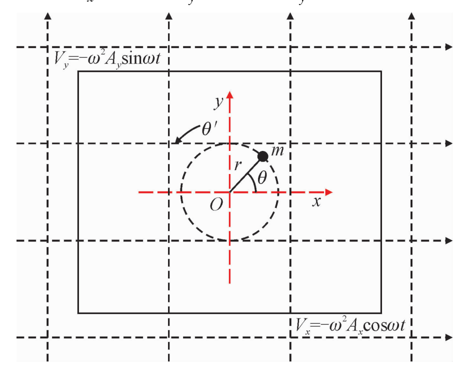


图 1　复合振动环境中电驱动偏心转子的动力学模型

Fig. 1　Dynamic model of electrically-driven eccentric rotor in compound vibratory environment

偏心转子在复合振动环境中受到 x 方向上的振动力矩为

$$T_x=mrx''\sin\theta=-mr\omega^2A_x\cos\varphi\sin\theta$$

偏心转子在复合振动环境中受到 y 方向上的振动力矩为

$$T_y=-mry''\cos\theta=mr\omega^2A_y\sin\varphi\cos\theta$$

所以，偏心转子在复合振动环境中受到的振动力矩为

$$T_z=T_y+T_x=mr\omega^2A_y\sin\varphi\cos\theta-mr\omega^2A_x\cos\varphi\sin\theta$$

式中：T_z为振动力矩；θ 为偏心转子角位移。

复合振动环境中电驱动偏心转子的力矩平衡方程为

$$T_J+T_f+T_d=T_M+T_z$$

其中

$$T_J=J\theta'',$$
$$T_f=f\theta',$$
$$T_d=\frac{1}{2}mrfd\,(\theta')^2$$

式中：T_J为偏心转子的惯性力矩；T_f为振动系统的摩擦力矩；T_d为电动机的风机负载；T_M为电动机的电磁转矩。

利用三角函数积化和差公式，得到偏心转子动力学方程为

$$T_J+T_f+T_d=T_M+\frac{1}{2}mr\omega^2(A_y-A_x)\sin(\theta+\varphi)-\frac{1}{2}mr\omega^2(A_y+A_x)\sin(\theta-\varphi)\qquad(1)$$

2　振动系统相对运动微分方程

由于振动系统中存在着电机与复合振动环境的相对运动，而本研究针对的是偏心转子角频率被复合振动环境俘获时的运动。因此以复合振动环境为基准，研究复合振动环境振动的一个周期内的两者间的相对运动。

电驱动偏心转子被复合振动环境同向俘获时，偏心转子与复合振动环境的角速度在积分周期 $\left[t,t+\frac{2\pi}{\omega}\right]$内的平均转速相等，即

$$\frac{\omega}{2\pi}\int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega}}(\theta'-\varphi')\,\mathrm{d}t=0\qquad(2)$$

令

$$\bar{\varepsilon}(t)=\frac{\omega}{2\pi}\int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega}}(\theta-\varphi)\,\mathrm{d}t-\Delta\alpha$$

则有

$$\bar{\varepsilon}'(t)=\frac{\omega}{2\pi}\int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega}}(\theta'-\varphi')\,\mathrm{d}t$$

$$\bar{\varepsilon}''(t)=\frac{\omega}{2\pi}\int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega}}\theta''\mathrm{d}t$$

式中：$\Delta\alpha$ 为同步时偏心转子角位移与简谐振动角位移差，经换算后总可以在$(0,2\pi)$范围内；$\bar{\varepsilon}(t)$为偏心转子与复合振动环境角位移差的小参数积分均值变量；$\frac{\omega}{2\pi}\int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega}}\bar{\varepsilon}(t)\,\mathrm{d}t=0$，$\bar{\varepsilon}(t)\ll1$。

在频率俘获平衡点处，有

$$T_M\approx T_{M0}+C_M(\theta'-\omega)$$
$$T_d\approx T_{d0}+mfdr\omega(\theta'-\omega)$$
$$T_f\approx T_{f0}+f(\theta'-\omega)$$

其中

$$C_M=\left.\frac{\mathrm{d}T_M}{\mathrm{d}\theta'}\right|_\omega$$
$$T_{f0}=f\omega$$
$$T_{d0}=\frac{1}{2}mrfd\omega^2$$

式中：C_M为电驱动偏心转子被复合振动环境俘获时的机械特性斜率；T_{M0}为电驱动偏心转子被复合振动环境俘获时的电磁力矩；T_{d0}为电驱动偏心转子被复合振动环境俘获时的风机负载；T_{f0}为电驱动偏心转子被复合振动环境俘获时的摩擦力矩；f 为振动系统的摩擦系数；d 为电机的风机负载等效直径。

以 $\bar{\varepsilon}(t)$为变量，对式(1)进行变换，将 $\varphi'=\omega$ 代

入变化后的式子,并在$\left[t,t+\frac{2\pi}{\omega}\right]$内两边积分,得到

$$\bar{\varepsilon}''(t)+\frac{f+mfdr\omega-C_M}{J}\bar{\varepsilon}'(t)+\frac{T_{f0}+T_{d0}-T_{M0}}{J}$$
$$=\frac{mr\omega^2(A_y-A_x)}{2J}\left[\frac{\omega}{2\pi}\int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega}}\sin(\theta+\varphi)\mathrm{d}t\right]-\frac{mr\omega^2(A_y+A_x)}{2J}\left[\frac{\omega}{2\pi}\int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega}}\sin(\theta-\varphi)\mathrm{d}t\right] \quad (3)$$

3 实现频率俘获的同步性判据与稳定性判据

因为式(3)中仍然包含关于θ与φ的三角函数关系,需要对其进一步的线性化处理。

对式(3)中的三角函数进行线性化处理如下。

1) $\frac{\omega}{2\pi}\int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega}}\sin(\theta-\varphi)\mathrm{d}t$线性化处理

在$\theta-\varphi=\Delta\alpha$处对$\sin(\theta-\varphi)$应用泰勒公式,忽略高次项,得

$$\sin(\theta-\varphi)=\sin\Delta\alpha+(\theta-\varphi-\Delta\alpha)\cos\Delta\alpha$$

对上式两边积分得

$$\frac{\omega}{2\pi}\int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega}}\sin(\theta-\varphi)\mathrm{d}t=\frac{\omega}{2\pi}\cos\Delta\alpha\int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega}}(\theta-\varphi-\Delta\alpha)\mathrm{d}t+\sin\Delta\alpha \quad (4)$$

注意到

$$\frac{\omega}{2\pi}\int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega}}(\theta-\varphi-\Delta\alpha)\mathrm{d}t=\bar{\varepsilon}(t)$$

代入式(4)得

$$\frac{\omega}{2\pi}\int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega}}\sin(\theta-\varphi)\mathrm{d}t=\sin\Delta\alpha+\bar{\varepsilon}t\cos\Delta\alpha \quad (5)$$

2) $\frac{\omega}{2\pi}\int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega}}\sin(\theta+\varphi)\mathrm{d}t$线性化处理

在$\theta-\varphi=\Delta\alpha$处对$\sin(\theta+\varphi)$应用泰勒公式,忽略高次项,得

$$\sin(\theta+\varphi)=\sin(\Delta\alpha+2\varphi)+(\theta-\varphi-\Delta\alpha)\cdot\cos(\Delta\alpha+2\varphi)$$

对上式两边积分得

$$\frac{\omega}{2\pi}\int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega}}\sin(\theta+\varphi)\mathrm{d}t=\frac{1}{2\omega}\left\{\frac{\omega}{2\pi}[(\theta-\varphi-\Delta\alpha)\sin(\Delta\alpha+2\varphi)]\Big|_t^{t+\frac{2\pi}{\omega}}\right\}-\frac{1}{2\omega}\left[\frac{\omega}{2\pi}\int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega}}\sin(\Delta\alpha+2\varphi)\mathrm{d}(\theta-\varphi)\right] \quad (6)$$

注意到

$$\frac{\omega}{2\pi}[(\theta-\varphi-\Delta\alpha)\sin(\Delta\alpha+2\varphi)]\Big|_t^{t+\frac{2\pi}{\omega}}=\bar{\varepsilon}'(t)\sin(\Delta\alpha+2\varphi)$$

代入式(6)得

$$\frac{\omega}{2\pi}\int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega}}\sin(\theta+\varphi)\mathrm{d}t=\frac{1}{2\omega}\bar{\varepsilon}'(t)\sin(\Delta\alpha+2\varphi)+\left(\frac{1}{2\omega}\right)^2\left\{\frac{\omega}{2\pi}[(\theta'-\omega)\cos(\Delta\alpha+2\varphi)]\Big|_t^{t+\frac{2\pi}{\omega}}\right\}-\left(\frac{1}{2\omega}\right)^2\left[\frac{\omega}{2\pi}\int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega}}\cos(\Delta\alpha+2\varphi)\mathrm{d}(\theta'-\varphi')\right] \quad (7)$$

注意到

$$\frac{\omega}{2\pi}[(\theta'-\omega)\cos(\Delta\alpha+2\varphi)]\Big|_t^{t+\frac{2\pi}{\omega}}=\bar{\varepsilon}''(t)\cos(\Delta\alpha+2\varphi)$$

代入式(7)得

$$\frac{\omega}{2\pi}\int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega}}\sin(\theta+\varphi)\mathrm{d}t=\frac{1}{2\omega}\bar{\varepsilon}'(t)\sin(\Delta\alpha+2\varphi)+\left(\frac{1}{2\omega}\right)^2\bar{\varepsilon}''(t)\cos(\Delta\alpha+2\varphi)-\left(\frac{1}{2\omega}\right)^2\left[\frac{\omega}{2\pi}\int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega}}\cos(\Delta\alpha+2\varphi)\mathrm{d}(\theta'-\varphi')\right]$$

可以递推$\frac{\omega}{2\pi}\int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega}}\sin(\theta+\varphi)\mathrm{d}t$为$\bar{\varepsilon}'(t)$,$\bar{\varepsilon}''(t)$,…,的无穷阶函数,忽略$\bar{\varepsilon}''(t)$以上的高阶微分项,得出

$$\frac{\omega}{2\pi}\int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega}}\sin(\theta+\varphi)\mathrm{d}t\approx\frac{1}{2\omega}\bar{\varepsilon}'(t)\sin(\Delta\alpha+2\varphi)+\left(\frac{1}{2\omega}\right)^2\bar{\varepsilon}''(t)\cos(\Delta\alpha+2\varphi) \quad (8)$$

综上,振动系统的运动微分方程为

$$\frac{mr(A_y-A_x)\cos(\Delta\alpha+2\varphi)-8J}{8J}\bar{\varepsilon}''(t)+\frac{mr\omega(A_y-A_x)\sin(\Delta\alpha+2\varphi)-4(f+mfdr\omega-C_M)}{4J}\bar{\varepsilon}'(t)-\frac{mr\omega^2(A_y+A_x)\cos\Delta\alpha}{2J}\bar{\varepsilon}(t)-\frac{mr\omega^2(A_y+A_x)\sin\Delta\alpha}{2J}+\frac{T_{M0}-T_{f0}-T_{d0}}{J}=0 \quad (9)$$

3.1 实现频率俘获的同步性判据

当偏心转子与复合振动环境实现同向同

步时，有

$$\bar{\varepsilon}''(t)=\bar{\varepsilon}'(t)=\bar{\varepsilon}(t)=0 \tag{10}$$

将式(10)代入式(9)，得平衡点处的静态力矩平衡方程为

$$-\frac{mr\omega^2(A_y+A_x)}{2J}\sin\Delta\alpha+\frac{T_{M0}-T_{f0}-T_{d0}}{J}=0$$

变化为

$$\sin\Delta\alpha=\frac{2(T_{M0}-T_{f0}-T_{d0})}{mr\omega^2(A_x+A_y)}$$

整理后得

$$\Delta\alpha=\arcsin\frac{2}{D} \tag{11}$$

$$D=\frac{mr\omega^2(A_x+A_y)}{T_{M0}-T_{f0}-T_{d0}} \tag{12}$$

式中 D 为振动系统的同步性指数。

从式(11)可以看出，同步性指数的绝对值必须大于或等于2才能保证 $\Delta\alpha$ 有解。D 的大小可以说明振动系统同步性的强弱程度，当 $|D|\gg 2$ 时，振动系统为强同步；当 $|D|\approx 2$ 时，振动系统为弱同步；当 $|D|<2$ 时，振动系统不能实现同步。

当复合振动环境的角频率小于电动机同步角速度 ω_0 时，电动机处于电动状态。此时，有

$$(T_{M0}-T_{f0}-T_{d0})>0$$

则有

$$\sin\Delta\alpha>0,$$

$$\bar{T}_{z0}=-\frac{mr\omega^2(A_x+A_y)}{2}\sin\Delta\alpha<0$$

振动力矩为以 $\bar{T}_{z0}$ 为平均值的一个负载力矩，电动机工作在电动状态，同步相位差 $\Delta\alpha$ 位于 $(0,\pi)$。并且有

$$0<\frac{2(T_{M0}-T_{f0}-T_{d0})}{mr\omega^2(A_x+A_y)}<1 \tag{13}$$

当复合振动环境的角频率大于电动机同步角速度 ω_0 时，电动机处于回馈状态。此时，有

$$(T_{M0}-T_{f0}-T_{d0})<0$$

则有

$$\sin\Delta\alpha<0,$$

$$\bar{T}_{z0}=-\frac{mr\omega^2(A_x+A_y)}{2}\sin\Delta\alpha>0$$

振动力矩为以 $\bar{T}_{z0}$ 为平均值的一个主动力矩，电动机工作在回馈状态，同步相位差 $\Delta\alpha$ 位于 $(\pi,2\pi)$。并且有

$$-1<\frac{2(T_{M0}-T_{f0}-T_{d0})}{mr\omega^2(A_x+A_y)}<0 \tag{14}$$

综上，同步性判据为

$$\left|\frac{2(T_{M0}-T_{f0}-T_{d0})}{mr\omega^2(A_x+A_y)}\right|<1 \tag{15}$$

3.2 实现频率俘获的稳定性判据

在频率俘获平衡点处的周期系数微分方程为

$$\bar{\varepsilon}''(t)+\frac{4mr\omega^2(A_y+A_x)\cos\Delta\alpha}{8J-mr(A_y-A_x)\cos(\Delta\alpha+2\varphi)}\bar{\varepsilon}(t)+\frac{8(f+mfdr\omega-C_M)-2mr\omega(A_y-A_x)\sin(\Delta\alpha+2\varphi)}{8J-mr(A_y-A_x)\cos(\Delta\alpha+2\varphi)}\bar{\varepsilon}'(t)=0 \tag{16}$$

这是一个以 ω/π 为周期的二阶周期系数线性微分方程，采用二阶周期系数线性微分方程的稳定性理论[26-27]，使式(16)稳定的条件如下式。

$$\begin{cases}\dfrac{4mr\omega^2(A_y+A_x)}{8J-mr(A_y-A_x)\cos(\Delta\alpha+2\varphi)}\cos\Delta\alpha>0\\ \displaystyle\int_0^{\frac{\omega}{\pi}}\frac{8(f+mfdr\omega-C_M)-2mr\omega(A_y-A_x)\sin(\Delta\alpha+2\varphi)}{8J-mr(A_y-A_x)\cos(\Delta\alpha+2\varphi)}\mathrm{d}t>0\end{cases} \tag{17}$$

在通常情况下有

$$J>mrA$$

所以根据式(17)第一个式子得

$$\cos\Delta\alpha>0$$

根据式(17)第二个式子得

$$\int_0^{\frac{\omega}{\pi}}\frac{8(f+mfdr\omega-C_M)-2mr\omega(A_y-A_x)\sin(\Delta\alpha+2\varphi)}{8J-mr(A_y-A_x)\cos(\Delta\alpha+2\varphi)}\mathrm{d}t=\frac{8\pi(f+mfdr\omega-C_M)}{\omega\sqrt{64J^2-m^2r^2(A_y-A_x)^2}}>0$$

综上,稳定性判据为

$$\cos\Delta\alpha > 0 \tag{18}$$

3.3 小　结

同步性判据和稳定性判据都是指导系统实现振动同步的重要判据,同步性判据决定了可能的同步运转平衡点,而稳定性确定了哪一个平衡点为稳定的平衡点。在频率俘获平衡点处,结合同步性判据和稳定性判据有

$$\begin{cases}\sin\Delta\alpha = \dfrac{2(T_{M0} - T_{f0} - T_{d0})}{mr\omega^2(A_x + A_y)}\\ \cos\Delta\alpha > 0\end{cases}$$

1)当复合振动环境的角频率小于电动机同步角速度 ω_0 时,电动机处于电动状态。此时有 $\begin{cases}\sin\Delta\alpha > 0\\ \cos\Delta\alpha < 0\end{cases}$ 成立,同步相位差 $\Delta\alpha$ 位于 $(0, \pi/2)$,如图 2 第Ⅰ象限所示。

2)当复合振动环境的角频率大于电动机同步角速度 ω_0 时,电动机处于回馈状态。此时有 $\begin{cases}\sin\Delta\alpha < 0\\ \cos\Delta\alpha > 0\end{cases}$ 成立,同步相位差 $\Delta\alpha$ 位于 $(3\pi/2, 2\pi)$,如图 2 第Ⅳ象限所示。

综上,同步相位差 $\Delta\alpha$ 分布范围如下图所示。

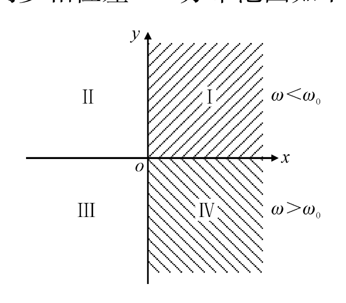


图 2　同步相位差 $\Delta\alpha$ 分布图

Fig. 2　Diagram of synchronous phase difference $\Delta\alpha$ distribution

4　仿真试验

为了验证振动系统频率俘获的同步性和稳定性判据的正确性,根据式(1)在 Matlab/Simulink 中建立振动系统的动力学模型并进行仿真试验。

4.1　电机参数设置

本小节以实际振动电机为参考,设置振动系统的相关参数如表 1 所示。

表 1　振动系统的参数

Tab. 1　Parameters of the vibrating system

名称	参数值	单位
电机最大力矩 T_M	3.9	N·m
电机最大转差率 s_m	0.07	
电机同步角速度 ω_0	33.33π	rad/s
x 方向上简谐振动的振幅 A_x	0.003	m
y 方向上简谐振动的振幅 A_y	0.004	m
偏心块的质量 m	4	kg
偏心块的半径 r	0.05	m
电机风机负载等效直径 d	0.1	m
摩擦系数 f	0.002	
偏心转子的转动惯量 J	0.01	kg·m^2
仿真时间	100	s

4.2　仿真试验

仿真试验 1:设振动角频率 $\omega = 32.67\pi$ rad/s,此时转差率 $s = 0.02$,将参数代入电机机械特性实用表达式得 $T_{M0} = 2.06$,求得 $T_{f0} = f\omega \approx 0.21$、$T_{d0} = mrfd\omega^2/2 \approx 0.21$、$mr\omega^2(A_x + A_y) \approx 14.74$,代入同步性判据得

$$\left|\frac{2(T_{M0} - T_{f0} - T_{d0})}{mr\omega^2(A_x + A_y)}\right| \approx 0.22 < 1$$

相位差 $\varepsilon(t) + \Delta\alpha$ 仿真如图 3(a)所示,稳定时相位差为 −50.037 rad,在 360°范围内约是 11.64°(第一象限),符合同步性判据和稳定性判据;转速差 $\varepsilon'(t)$ 仿真如图 3(b)所示,稳定波动在 0 上下范围内。

仿真试验 2:设振动角频率为 $\omega = 34\pi$ rad/s,此时转差率 $s = -0.02$,将参数代入电机机械特性实用表达式得 $T_{M0} = -2.06$,求得 $T_{d0} = mrfd\omega^2/2 \approx 0.231$、$T_{f0} = f\omega \approx 0.2$、$mr\omega^2(A_x + A_y) \approx 15.973$,代入同步性判据得

$$\left|\frac{2(T_{M0} - T_{f0} - T_{d0})}{mr\omega^2(A_x + A_y)}\right| \approx 0.313 < 1$$

相位差 $\varepsilon(t) + \Delta\alpha$ 仿真如图 4(a)所示,稳定时相位差为 −56.863 rad,在 360°范围内约是 342°(第四象限),符合同步性判据和稳定性判据;转速差 $\varepsilon'(t)$ 仿真如图 4(b)所示,稳定波动在 0 上下等值范围内。

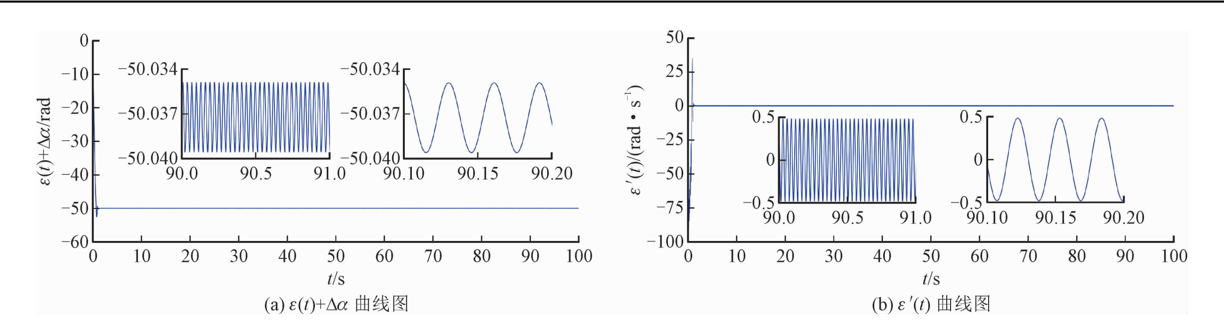


图 3　$\varepsilon(t)+\Delta\alpha$ 和 $\varepsilon'(t)$ 曲线图($\omega=32.67\pi$)

Fig. 3　Graph of $\varepsilon(t)+\Delta\alpha$ and $\varepsilon'(t)$ ($\omega=32.67\pi$)

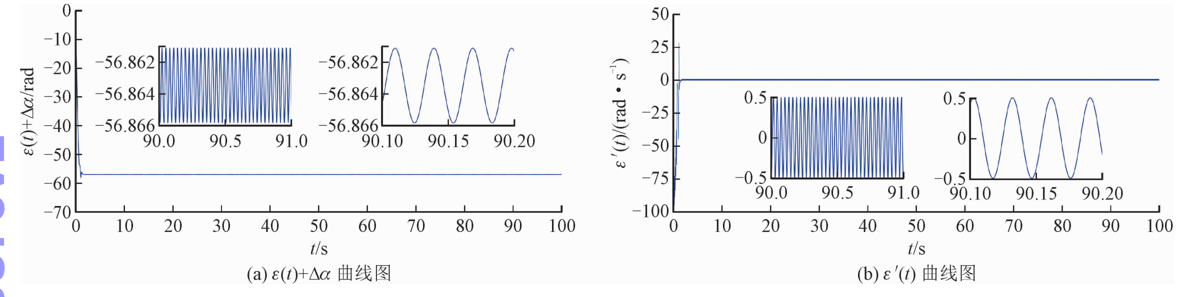


图 4　$\varepsilon(t)+\Delta\alpha$ 和 $\varepsilon'(t)$ 曲线图($\omega=34\pi$)

Fig. 4　Graphs of $\varepsilon(t)+\Delta\alpha$ and $\varepsilon'(t)$ ($\omega=34\pi$)

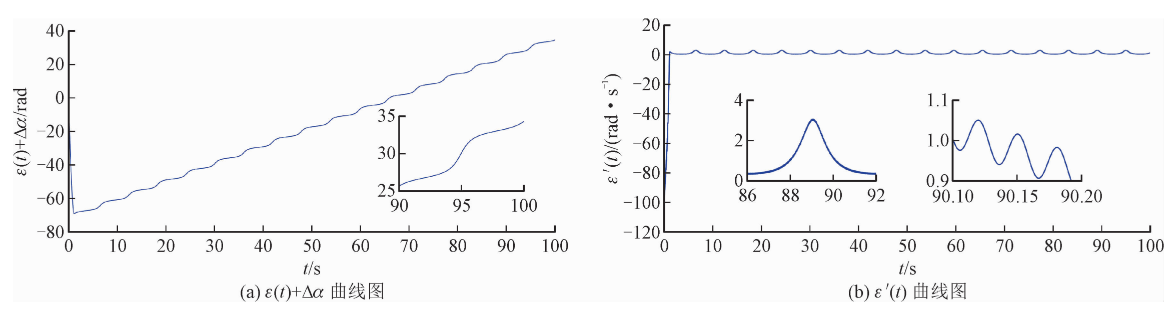


图 5　$\varepsilon(t)+\Delta\alpha$ 和 $\varepsilon'(t)$ 曲线图($\omega=32.67\pi, A_x=0.000\,6, A_y=0.000\,7$)

Fig. 5　Graphs of $\varepsilon(t)+\Delta\alpha$ and $\varepsilon'(t)$ ($\omega=32.67\pi, A_x=0.000\,6, A_y=0.000\,7$)

仿真试验 3：设振动角频率为 $\omega=32.67\pi$ rad/s、$A_x=0.000\,6$、$A_y=0.000\,7$，此时转差率 $s=0.02$，代入电机机械特性实用表达式得 $T_{M0}=2.06$，求得 $T_{f0}=f\omega\approx0.21$、$T_{d0}=mrfd\omega^2/2\approx0.21$、$mr\omega^2(A_x+A_y)\approx2.74$，代入同步性判据得

$$\left|\frac{2(T_{M0}-T_{f0}-T_{d0})}{mr\omega^2(A_x+A_y)}\right|\approx1.2>1$$

相位差仿真如图 5(a)所示，相位差未稳定，不满足同步性判据和稳定性判据；转速差 $\varepsilon'(t)$ 仿真如图 5(b)所示，未稳定波动在 0 上下等值范围内。

仿真试验 4：设振动角频率为 $\omega=34\pi$ rad/s、$A_x=0.000\,8$、$A_y=0.000\,9$，此时转差率 $s=-0.02$，代入电机机械特性实用表达式得 $T_{M0}=-2.06$，求得 $T_{f0}=f\omega\approx0.21$、$T_{d0}=mrfd\omega^2/2\approx0.23$、$mr\omega^2(A_x+A_y)\approx3.88$，代入同步性判据得

$$\left|\frac{2(T_{M0}-T_{f0}-T_{d0})}{mr\omega^2(A_x+A_y)}\right|\approx1.29>1$$

相位差仿真如图 6(a)所示，相位差未稳定，不满足同步性判据和稳定性判据；转速差 $\varepsilon'(t)$ 仿真如图 6(b)所示，未稳定波动在 0 上下等值范围内。

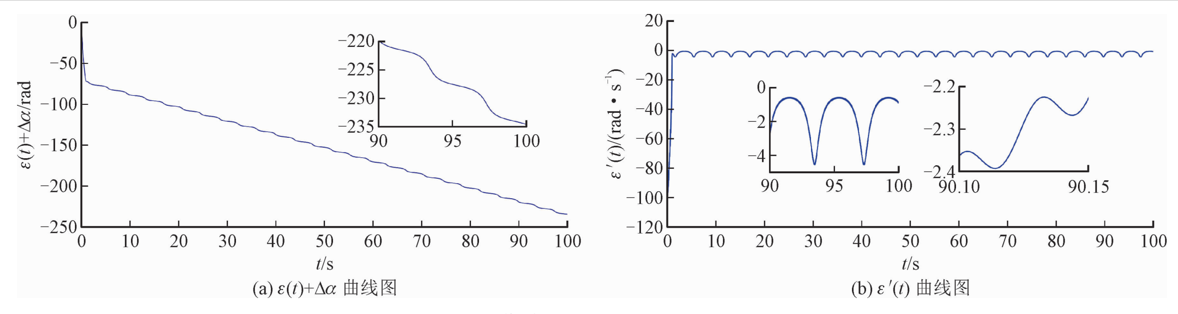


图 6 $\varepsilon(t)+\Delta\alpha$ 和 $\varepsilon'(t)$ 曲线图($\omega=34\pi, A_x=0.000\,8, A_y=0.000\,9$)

Fig. 6 Graphs of $\varepsilon(t)+\Delta\alpha$ and $\varepsilon'(t)$ ($\omega=34\pi, A_x=0.000\,8, A_y=0.000\,9$)

5 结论与讨论

本研究对电驱动偏心转子与复合振动环境的振动同步理论进行了研究,并利用仿真软件对动力学模型进行了仿真试验。通过本研究,可以得到以下主要结论。

1)在小参数法的基础上,提出研究振动同步问题的新方法——小参数积分均值法,将复合振动环境与偏心转子的振动同步问题,转化为复合振动环境与偏心转子相位差的小参数周期系数积分均值微分方程。

2)得出实现复合振动环境与偏心转子振动同步的同步性判据和稳定性判据,分析同步性与稳定性判据确定了复合振动环境与偏心转子相位差的稳定相位,并通过仿真试验证实了理论判据的有效性。

3)本研究基于激振器处于一个强振动环境中,偏心转子产生的惯性力不影响振动环境的假设下开展研究。本研究注重基础理论研究,目的是解释电驱动偏心转子与振动环境振动同步的机理,提供一种研究振动同步的新方法。

参考文献:

[1] 闻邦椿. 机械系统的振动同步与控制同步[M]. 北京:科学出版社,2003.

[2] VANDERPOL B. A theory of the amplitude of free and forced triode vibrations[J]. Radio review,1920,1:701-710,754.

[3] RAYLEIGH J. The theory of sound[M]. New York:Dover Publications,1945.

[4] BLEKHMAN I I. Self-synchronization of vibration in some types of vibrational machines[J]. Inzhenerny sbornik,1953,16:49-72.

[5] BLEKHMAN I I. Synchronization of dynamical systems[J]. Journal of applied mathematics and mechanics,1964,28(2):239-265.

[6] BLEKHMAN I I. Vibrational mechanics[M]. Singapore:World Scientific Publishing,2000.

[7] BLEKHMAN I I. Selected topics in vibrational mechanics[M]. Singapore:World Scientific Publishing,2004.

[8] BLEKHMAN I I,YAROSHEVICH N P. Extension of the domain of applicability of the integral stability criterion (extremum property) in synchronization problems[J]. Journal of applied mathematics and mechanics,2004,68(6):839-846.

[9] 闻邦椿,关立章. 自同步振动机的同步理论与调试方法[J]. 矿山机械,1979(5):35-45.
WEN Bangchun, GUAN Lizhang. Synchronization theory and debugging method of self-synchronization vibration machine[J]. Mining & processing equipment,1979(5):35-45(in Chinese).

[10] 闻邦椿,关立章. 空间单质体与双质体自同步振动机的同步理论[J]. 东北工学院学报,1980(1):53-71.
WEN Bangchun,GUAN Lizhang. Research concerning the theory of synchronization on a self-synchronous vibrating machine with single and dual mass in space motion[J]. Journal of Northeastern University,1980(1):53-71(in Chinese).

[11] 闻邦椿. 激振器偏移式自同步振动机运动规律的研究[J]. 应用力学学报,1985(3):23-36,96.
WEN Bangchun. Study on regular pattern of motion of self-synchronous vibration machines with deviated vibrators[J]. Chinese journal of applied mechanics,1985(3):23-36,96(in Chinese).

[12] 闻邦椿. 关于振动同步理论的几个最新研究结果及其应用[J]. 振动与冲击,1983(3):1-10.
WEN Bangchun. Some new results to research on vibration synchronization theory with its application[J]. Journal of vibration and shock,1983(3):1-10(in Chinese).

[13] 闻邦椿,林向阳. 振动同步传动及其工业应用[J]. 机械工程学报,1984,3(20):26-42.
WEN Bangchun, LIN Xiangyang. Vibratory synchronization transmission and its industry applications[J]. Journal of mechanical engineering,1984,3(20):26-42(in Chinese).

[14] 闻邦椿. 振动机械理论、技术及其应用[M]. 北京:科学出版社,2010.

[15] 闻邦椿,李以农,张义民,等. 振动利用工程[M]. 北京:科学出版社,2005.

[16] 侯勇俊,闫国兴. 三电机激振自同步振动系统的机电耦合机理[J]. 振动工程学报,2006(3):354-358.
HOU Yongjun, YAN Guangxing. Electromechanical-coupling mechanism of self-synchronous vibrating system with three-motor-driving[J]. Journal of vibration engineering,2006(3):354-358(in Chinese).

[17] 姜娇,陈长征,薄磊,等. 反向转动双机驱动振动筛同步控制[J]. 振动与冲击,2019,38(8):126-132.
JIANG Jiao,CHEN Changzheng,BO Lei,et al. Controlled synchronization of vibrating screen driven by two exciters rotating in the opposite direction[J]. Journal of vibration and shock,2019,38(8):126-132 (in Chinese).

[18] ZHAO C Y,ZHAO Q H,GONG Z M,et al. Synchronization of two self-synchronous vibrating machines on an isolation frame[J]. Shock of vibration,2010,18(1/2):73-90.

[19] ZHAO C Y,ZHAO Q H,ZHANG Y M,et al. Synchronization of two non-identical coupled exciters in a non-resonant vibrating system of plane motion[J]. Journal of mechanical science and technology,2011,25(1):49-60.

[20] 赵春雨,刘戡,叶小芬,等. 反向回转双机驱动振动系统的自同步理论[J]. 机械工程学报,2009,45(9):24-30.
ZHAO Chunyu,LIU Kan,YE Xiaofen,et al. Self-synchronization theory of a vibrating system with two-motor drives rotating in opposite directions[J]. Journal of mechanical engineering,2009,45(9):24-30(in Chinese).

[21] 赵春雨,王得刚,张昊,等. 同向回转双机驱动振动系统的频率俘获[J]. 应用力学学报,2009,26(2):283-287.
ZHAO Chunyu,WANG Degang,ZHANG Hao,et al. Frequency capture of vibration system with two-motor drives rotating in same direction[J]. Chinese journal of applied mechanics,2009,26(2):283-287 (in Chinese).

[22] 李鹤,刘丹,姜来,等. 含二次隔振架的双机驱动振动机的自同步理论研究[J]. 振动与冲击,2014,33(8):134-140.
LI He,LIU Dan,JIANG Lai,et al. Self-synchronization theory of a vibrating system with a two-stage vibration isolation frame driven by two motors[J]. Journal of vibration and shock,2014,33(8):134-140(in Chinese).

[23] 顾大卫,刘云山,张居乾,等. 非对称双激振器振动同步传动[J]. 振动与冲击,2019,38(1):37-43,64.
GU Dawei,LIU Yunshan,ZHANG Juqian,et al. Vibratory synchronization transmission of an asymmetrical two-exciter system[J]. Journal of vibration and shock,2019,38(1):37-43,64(in Chinese).

[24] 顾大卫,闻邦椿. 在振动筛上实现振动同步传动及试验研究[J]. 机械设计与制造,2018(3):4-6.
GU Dawei,WEN Bangchun. Theory and experimental study of vibratory synchronization transmission in vibrating screen[J]. Machinery design & manufacture,2018(3):4-6 (in Chinese).

[25] SU M,LI R,XIE Z P,et al. Theory of frequency captured of eccentric rotor by vibration environment with same direction[J]. Shock of vibration,2021(8):1-8.

[26] CHEN X X. Characteristic exponents for secondorder periodic linear differential equation[J]. Annals of differential equations,1997(2):107-118.

[27] 史金麟. 周期系数二阶线性微分方程的稳定性[J]. 数学物理学报,2000(1):130-139.
SHI Jinlin. On stability of two order linear differential equations with periodic coefficient[J]. Acta mathematica scientia,2000(1):130-139(in Chinese).

(编辑　李坤璐)